数理解析研究所講究録
997 巻 1997 年 206-212

曲面上のコード・ダイアグラムのなすポワソン代数の量子化

東大M2　柳沢　韻（Yanagisawa Hibiki）

1. 量子化

Lie 代数 P が可換な積をもち、Leibniz則
$\{ab,c\}=\{a,c\}b+a\{b,c\}$ をみたすとき、P をPoisson代数という。Poisson代数 P の量子化は、P の非可換な拡大である。

<u>定義</u>　$\mathbb{C}$ 上のPoisson代数 P の量子化とは、$\mathbb{C}[h]$ 上の代数 A と全射 $p: A\to P$ の組 (A,p) で次をみたすものである。

(1)　$\varphi:\mathbb{C}[h]\to\mathbb{C}$　$(\varphi(h)=0)$　なる線形写像に関して、

$$p(\alpha x)=\varphi(\alpha)p(x)\qquad(\alpha\in\mathbb{C}[h],\ x\in A)$$

(2)　$$ab-ba=hp^{-1}\{p(a),p(b)\}\mod h^2A$$
$$(a,b\in A)$$

<u>例</u>　$\mathbb{C}$上の Lie代数 $\mathfrak{g}$ の対称代数 $S(\mathfrak{g})$ には、Leibniz則によって、bracketが(一意的に)拡張され、Poisson代数となる。
$\mathfrak{g}$ のbracketを $\{,\}$ とすると、$\mathbb{C}[h]\otimes\mathfrak{g}$ は $h\{,\}$ なるbracketに関して $\mathbb{C}[h]$ 上のLie代数となるが、この包絡代数 $U_h(\mathfrak{g})$ を考える。$h\to 0$ とすれば、線型写像

$p: U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$ を得るが、これは定義により次をみたす。

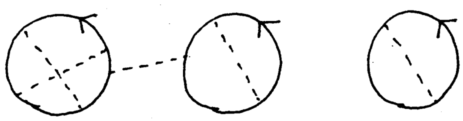
$ab - ba = h\{a, b\} = hp^{-1}\{p(a), p(b)\}$

従って $(U_h(\mathfrak{g}), p)$ は $S(\mathfrak{g})$ の量子化である。

2. 曲面上のコードダイアグラム

Chord diagramとは、有限個のoriented circleと両端をそれらの上にもつarc(以下chord)の集まりである。ただし、chordの端点はすべて異なり、向きを保つcirclesのdeffeomorphismsによって同一視を行なう。

a chord diagram ：



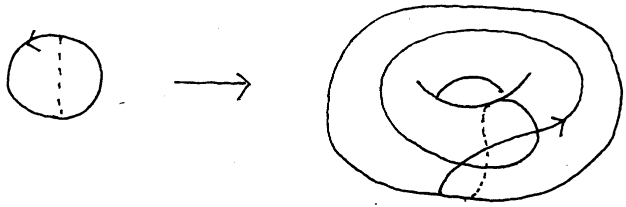
Σ をoriented surfaceとしたとき、chord diagramをなすcirclesから Σ への連続写像 γ で次をみたすものを Σ 上のchord diagramという。

* a, b が一つのchordの両端ならば $\gamma(a) = \gamma(b)$

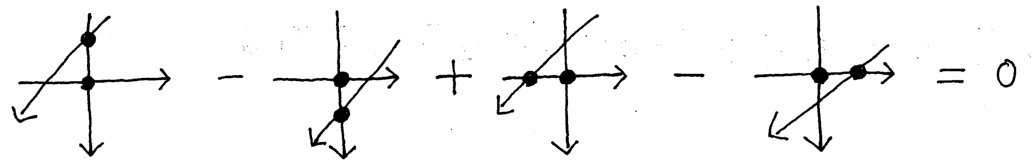
ただし、上の条件をみたすfree homotopyによる変形によって同一視をする。また、端点の像を黒点で表わす。

例

γ:



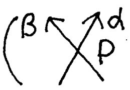
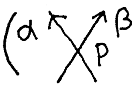
$\mathcal{D}(\Sigma)$ を Σ 上の chord diagram で張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし、$D(\Sigma)=\mathcal{D}(\Sigma)/$ 4term relation とする。ここで、4term relation とは、



なる関係である。

Σ 上の chord diagram γ の self intersection が有限個で全て transverse double point であるとき、γ は generic であるという。今、$\alpha\cup\beta$ が generic となる α,β を選び bracket を

$$\{\alpha,\beta\}=\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\varepsilon(p;\alpha,\beta)\,\alpha\cup\beta(p)$$

$\varepsilon(p;\alpha,\beta)=$
- $+1$ ( に対して)
- -1 ( に対して)

$\alpha\cup\beta(p)$ は $\alpha\cup\beta$ の一部  を  でおきかえた diagram

と定義する。また、α,β の(可換な)積を $\alpha\beta=\alpha\cup\beta$ と定める。

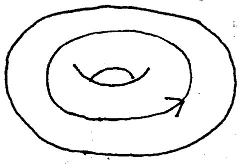
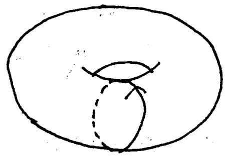
このとき次が知られている。

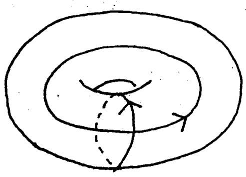
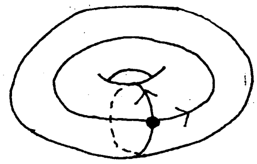
<u>命題</u>[AMR1]

上の bracket は $D(\Sigma)$ で well defined であり、$D(\Sigma)$ は Poisson 代数になる。

<u>Remark</u> $D(\Sigma)$ は[K] における $\mathcal{A}(\Sigma)$, [AMR]における $ch(\Sigma)$ と同じものである。

例

$\alpha =$  $\beta =$  とする。

$\alpha\beta =$  $\{\alpha, \beta\} =$ 

3. $D(\Sigma)$の量子化

$\Sigma \times I$ （$I = [0,1]$）内の oriented singular link とは、有限個の oriented circle の immersion

$L : S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \longrightarrow \Sigma \times I$

であって、intersection が有限個ですべて transverse double point となるもののことである。ただし、同値関係を次で定める。

$L_1 = L_2 \Leftrightarrow$ $\Sigma \times I$ の isotopy h_t が存在して、$h_0 = \mathrm{id}$,
$h_1(L_1) = L_2$ かつ $h_t(L_1)$ は singular link となる。

$\Sigma \times I$ 内の singular link が $\mathbb{C}[[h]]$ 上張る加群を次の skein relation で割った加群を $Q(\Sigma)$ とする。

$Q(\Sigma) = \mathbb{C}[h]\{\text{singular links in } \Sigma \times I\}/\text{skein relation}$

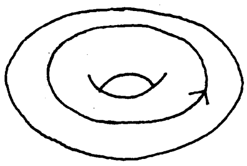
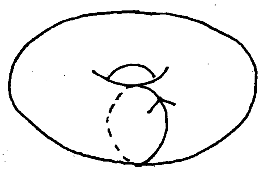
skein relation: h 

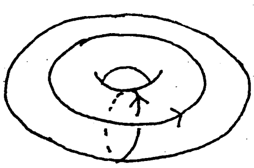
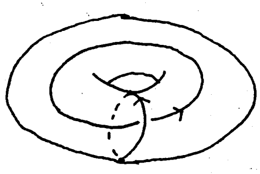
Remark L_1, L_2 を intersection をもたない links とする。このとき、$L_1 \neq L_2$ ならば $L_1 \neq L_2$ in $Q(\Sigma)$

Singular links L_1, L_2 に対して積を次で定める。

$$L_1 L_2 = \begin{array}{c}\boxed{L_1}\\ \boxed{L_2}\end{array} = \left\{ \begin{array}{l} (a, t) \in \Sigma \times I \quad ; \\ t > \frac{1}{2} \text{ のとき } (a, 2t-1) \in L_1 \\ t < \frac{1}{2} \text{ のとき } (a, 2t) \in L_2 \end{array} \right\}$$

例

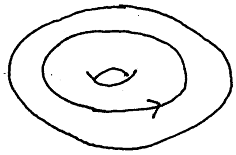
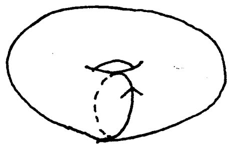
$a =$  $b =$ 

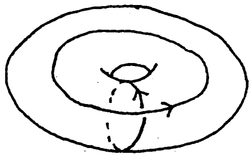
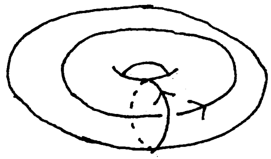
$ab =$  $ba =$ 

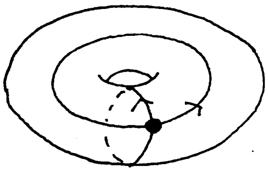
射影 $\pi: \Sigma \times I \to \Sigma$ は $h \to 0$ としたときの写像 $p: Q(\Sigma) \to D(\Sigma)$ を引き起こす。

定理 $p: Q(\Sigma) \to D(\Sigma)$ は量子化である。

例

$a =$  $b =$  のとき、

$ab - ba =$  $-$ 

$= h$  $= hp^{-1}\{p(a), p(b)\}$

Remark 一般には、$ab-ba$ の全てのcrossing についての同様の議論によって定理は証明される。

4. 参考文献

ここで述べたことは、曲面上のloopの量子化に関する[T]の拡張であり、関連した事柄が[AMR2]で扱かわれている。

[AMR1] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin : The Poisson structure on the moduli space of flat connections and chord diagrams. Topology 35(4) p.p. 1069–1083, 1996

[AMR2] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin : Quantization of the algebra of chord diagrams

MSRI Preprint 1996-072

[K] T. Kohno: Elliptic KZ system, braid group of the torus and Vassiliev invariant,

[T] V. Turaev: Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. An. Sci. Éc. Norm. Sup., 24 pp. 635-704, 1991